

§9. Vzdálenost

Def.: Necht' $A, B \in E_3$. Vzdáleností dvou bodů A, B nazýváme délku úsečky AB a označujeme ji $\rho(A, B)$.

Pozn.: a) Vzdálenost bodů A, B je tedy reálné číslo $\rho(A, B) = |AB|$.

b) Vzdálenost $\rho(A, B)$ můžeme tedy považovat za zobrazení $\rho : E_3 \times E_3 \rightarrow R$, které má vlastnosti:

$\forall A, B, C \in E_3 : 1) \rho(A, B) \geq 0$, přičemž $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$

3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$, přičemž

$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C) \Leftrightarrow B \in AC$

c) Uvedených vlastností se používá k axiomatické definici vzdálenosti 2 bodů v E_3 (dokonce i v jiném prostoru).

Def.: Necht' $A \in E_3$ je bod a $\alpha \subseteq E_3$ je rovina.

Kolmým průmětem bodu A do roviny α nazýváme bod A_0 definovaný takto:

1) $A \in \alpha \Rightarrow A_0 = A$

2) $A \notin \alpha \Rightarrow A_0 \in p \cap \alpha, p \perp \alpha, A \in p$

Vzdáleností bodu A od roviny α nazýváme reálné číslo označované $\rho(A, \alpha)$ a

definované $\rho(A, \alpha) = \rho(A, A_0) = |AA_0|$, kde A_0 je kolmý průmět bodu A do roviny α .

Pozn.: $A \in \alpha \Rightarrow \rho(A, \alpha) = 0$

V.9.1.: Necht' $A \in E_3$ je bod, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak platí:

$$\rho(A, \alpha) = \min\{\rho(A, X), \text{lib. } X \in \alpha\}$$

Def.: Necht' $A \in E_3$ je bod, $p \subseteq E_3$ je přímka.

Kolmým průmětem bodu A na přímku p nazýváme bod A_0 definovaný takto:

1) $A \in p \Rightarrow A = A_0$

2) $A \notin p \Rightarrow A_0 = p \cap \alpha, \alpha \perp p, A \in \alpha$.

Vzdáleností bodu A od přímky p nazýváme reálné číslo označené $\rho(A, p)$ a definované takto: $\rho(A, p) = \rho(A, A_0)$, kde A_0 je kolmým průmětem bodu A na přímku p .

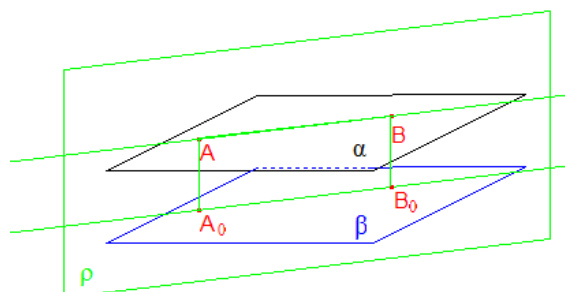
Pozn.: Jestliže $A \in p \Rightarrow \rho(A, p) = 0$.

V.9.2.: Necht' $A \in E_3$ je bod, $p \subseteq E_3$ je přímka. Pak platí:

$$\rho(A, p) = \min\{\rho(A, X), X \in p\}$$

V.9.3.: Necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny.

Pak $\forall A, B \in \alpha : \rho(A, \beta) = \rho(B, \beta)$.



Def.: Necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě rovnoběžné roviny. Pak vzdáleností dvou rovnoběžných rovin α, β nazýváme reálné číslo označené $\rho(\alpha, \beta)$ a definované takto:
 $\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \beta)$, kde $A \in \alpha$ lib.bod.

Pozn.: a) $\alpha = \beta \Rightarrow \rho(\alpha, \beta) = 0$
 b) Vzdálenost různoběžných rovin klademe rovnu 0.

V.9.4.: Necht' $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina, $p \parallel \alpha$. Pak $\forall A, B \in p : \rho(A, \alpha) = \rho(B, \alpha)$.
 [Dk.: Analogicky s Dk. V.9.3.]

Def.: Necht' $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Necht' $p \parallel \alpha$. Vzdáleností přímky p od roviny α s ní rovnoběžné nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, \alpha)$ a definované takto:
 $\rho(p, \alpha) = \rho(A, \alpha)$, kde $A \in p$ lib.bod.

Pozn.: a) $p \subseteq \alpha \Rightarrow \rho(p, \alpha) = 0$
 b) Je-li přímka p různoběžná s rovinou α , klademe jejich vzdálenost rovnu 0.

V.9.5.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou rovnoběžné přímky. Pak $\forall A, B \in p : \rho(A, q) = \rho(B, q)$.

Def.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou rovnoběžné přímky. Vzdáleností dvou rovnoběžných přímek p, q nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, q)$ a definované takto:
 $\rho(p, q) = \rho(A, q)$, kde $A \in p$ lib.bod.

Pozn.: a) $p = q \Rightarrow \rho(p, q) = 0$
 b) Vzdálenost různoběžných přímek klademe rovnu 0.

Def.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou mimoběžné přímky. Vzdáleností dvou mimoběžných přímek p, q nazýváme reálné číslo označené $\rho(p, q)$ a definované takto:
 $\rho(p, q) = \rho(\alpha, \beta)$, kde $\alpha \parallel \beta$, $p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta$.

Pozn.: Rovnoběžné roviny α, β procházející dvěma mimoběžkami p, q v předchozí definici jsou určené jednoznačně.

§10. Odchylka

Def.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou dvě komplanární přímky. Odchylku dvou komplanárních přímek p, q označujeme $/ \angle p, q /$ a definujeme takto:

1) Je-li $p \parallel q \Rightarrow / \angle p, q / = 0^\circ$

2) Je-li $p \nparallel q \Rightarrow$ odchylkou p, q rozumíme velikost ostrého úhlu nebo pravého úhlu, který přímky p, q svírají.

Pozn.: $\forall p, q \subseteq E_3: 0^\circ \leq \angle p, q \leq 90^\circ$

V.10.1.: Necht' $p', q', p, q \subseteq E_3$ jsou takové přímky, že $p' \parallel p, q' \parallel q$ (tedy dvojice p, p' a q, q' jsou komplanární). Pak platí: $\angle p, q = \angle p', q'$.

Def.: Necht' $p, q \subseteq E_3$ jsou dvě mimoběžné přímky. Odchylku dvou mimoběžných přímek p, q označujeme $\angle p, q$ a definujeme takto: $\angle p, q = \angle p', q'$, kde $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$ a p', q' jsou komplanární a různoběžné.

Def.: Necht' $p \subseteq E_3$ je přímka, $\alpha \subseteq E_3$ je rovina. Pak odchylku přímky p od roviny α označujeme $\angle p, \alpha$ a definujeme takto:

1) Je-li $p \parallel \alpha \Rightarrow \angle p, \alpha = 0^\circ$.

2) Je-li $p \nparallel \alpha \Rightarrow \angle p, \alpha = \angle p, q$, kde q je průsečnice roviny α s rovinou β , která je kolmá na rovinu α a obsahuje přímku p .

Pozn.: a) Jestliže $p \perp \alpha$, je přímka q z předchozí definice kolmý průmět p do roviny α , tzn. rovina β je určena jednoznačně.

b) Jestliže $\alpha \perp p$, rovina β není jednoznačně určena, ale vždy platí, že $p \perp q$.

c) Zřejmě platí: $p \perp \alpha \Leftrightarrow \angle p, \alpha = 90^\circ$

Def.: Necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě roviny. Odchylku dvou rovin α, β označujeme $\angle \alpha, \beta$ a definujeme ji takto:

1) Je-li $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \angle \alpha, \beta = 0$

2) Je-li $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \angle \alpha, \beta = \angle p, q$, kde $p \subseteq \alpha, q \subseteq \beta$ a obě přímky jsou kolmé k průsečnici rovin α, β .

V.10.2.: Necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě různoběžné roviny. $\alpha \cap \beta = r$, pak platí:

$\angle \alpha, \beta = \angle p, q$, kde $p = \alpha \cap \gamma, q = \beta \cap \gamma, \gamma \perp r$.

V.10.3.: Necht' $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \subseteq E_3$ jsou takové roviny, že $\alpha \parallel \alpha', \beta \parallel \beta'$. Pak platí:

$\angle \alpha, \beta = \angle \alpha', \beta'$.

V.10.4.: Necht' $\alpha, \beta \subseteq E_3$ jsou dvě roviny a $p, q \subseteq E_3$ dvě přímky, $p \perp \alpha, q \perp \beta$, pak

$\angle \alpha, \beta = \angle p, q$.

Pozn.: V.10.4. se výhodně využívá pro výpočet odchylky dvou rovin v analytické geometrii.